

VII Республиканская студенческая предметная олимпиада  
по направлению «Математика»  
26 марта 2015

1. Функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и имеет на  $[a, b]$  не менее трех различных нулей. Докажите, что существует точка  $x \in [a, b]$  такая, что  $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ .
2. Функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на полуоси  $[0, +\infty)$ . Известно, что  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  и  $\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \leq 2$  для всех  $x \in [0, +\infty)$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0$ .
3. Известно, что для квадратных матриц  $A$  и  $B$  одинакового порядка выполнены следующие равенства  $AB = BA$ ,  $A^{99} = E$ ,  $B^{100} = E$ , где  $E$  — единичная матрица. Докажите, что существует матрица  $C$  такая, что  $(A + E + B)C = C(A + E + B) = E$ .
4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}.$$

Доказать существование и найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$ .